CHUYÊN ĐỀ

SỐ PHỨC

ÔN THI TỐT NGHIỆP

Năm học: 2009 – 2010

A. SỐ PHỨC. CỘNG, TRỪ, NHÂN, CHIA SỐ PHỨC.

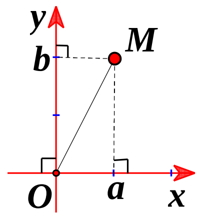
I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Số phức là một biểu thức dạng a + bi, trong đó a, b là các số thực và số i thỏa mãn $i^2 = -1$.

Kí hiệu $\boxed{z = a + bi}$

- i: đơn vị ảo,
- a: phần thực,
- b: phần ảo.

<u>Chú ý:</u>



- $z = a + 0i = a$ được gọi là số thực $(a \in \mathbb{R} \subset \mathbb{C})$
- $z = 0 + bi = bi$ được gọi là số ảo
- $0 = 0 + 0i$ vừa là số thực vừa là số ảo

Biểu diễn hình học của số phức: M(a;b) biểu diễn cho số phức z ⇔ z = a + bi

2. Hai số phức bằng nhau. Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ với $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$

$$\boxed{z = z' \Leftrightarrow \begin{cases} a = a' \\ b = b' \end{cases}}$$

3. Cộng và trừ số phức. Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ với $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$

$$\boxed{z + z' = (a + a') + (b + b')i}$$
$$\boxed{z - z' = (a - a') + (b - b')i}$$

- Số đối của z = a + bi là –z = – a – bi (a, b $\in \mathbb{R}$)

4. Nhân hai số phức. Cho hai số phức $z = a + bi$ và $z' = a' + b'i$ với $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$

$$\boxed{z.z' = (aa' - bb') + (ab' + a'b)i}$$

5. Số phức liên hợp của số phức z = a + bi là $\boxed{\bar{z} = a - bi}$

- $\bar{\bar{z}} = z$; $\overline{z + z'} = \bar{z} + \bar{z}'$; $\overline{z.z'} = \bar{z}.\bar{z}'$
- z là số thực $\Leftrightarrow z = \bar{z}$; z là số ảo $\Leftrightarrow z = -\bar{z}$

6. Môđun của số phức z = a + bi

- $\boxed{|z| = \sqrt{a^2 + b^2}} = \sqrt{z\bar{z}} = |\overrightarrow{OM}|$
- $|z| \geq 0\ \forall z \in C$, $|z| = 0 \Leftrightarrow z = 0$
- $|z.z'| = |z||z'|$, $|z + z'| \leq |z| + |z'|\ \forall z, z' \in \mathbb{C}$

7. Chia hai số phức.

- Số phức nghịch đảo của z $(z \neq 0)$: $z^{-1} = \frac{1}{|z|^2}\bar{z}$

- Thương của z' chia cho z ($z \neq 0$): $\boxed{\frac{z'}{z} = z'z^{-1} = \frac{z'\overline{z}}{|z|^2} = \frac{z'\overline{z}}{z\overline{z}}}$
- Với $z \neq 0$, $\frac{z'}{z} = w \Leftrightarrow z' = wz.$, $\overline{\left(\frac{z'}{z}\right)} = \frac{\overline{z'}}{\overline{z}}$, $\left|\frac{z'}{z}\right| = \frac{|z'|}{|z|}$

II. CÁC DẠNG TOÁN

Bài toán 1. Tìm phần thực và phần ảo và môđun của các số phức sau:

a. $z = i + (2-4i)(3+2i)$; b. $z = (-1+i)^3 - (2i)^3$; c. $z = \frac{2}{1-i} + \left(\overline{1+i}\right)$

Giải.

a. $z = i + (2-4i)(3+2i) = i + 14 - 8i = 14 - 7i$

Phần thực a = 14; Phần ảo b = -7; môđun $|z| = 7\sqrt{5}$

b. $z = (-1+i)^3 - (2i)^3 = 2 + 2i - (-8i) = 2 + 10i$

Phần thực a = 2; Phần ảo b = 10; môđun $|z| = 2\sqrt{26}$

c. $z = \frac{2}{1-i} + \left(\overline{1+i}\right) = 1 + i + 1 - i = 2$

Phần thực a = 2; Phần ảo b = 0; môđun $|z| = 2$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

1. Tìm phần thực và phần ảo và môđun của các số phức sau:

a. $(4 - i) + (2 + 3i) - (5 + i)$

b. $(2 + i)^3 - (3 - i)^3$

c. $\frac{1}{2-3i}$

d. $(2-3i)^3$

e. $(1 + i)^2 - (1 - i)^2$

f. $\left(\sqrt{3}+i\right)^2 - \left(\sqrt{3}-i\right)^2$

g. $(2 + i)^3 - (3 - i)^3$

h. $\frac{(1+2i)^2 - (1-i)^3}{(3+2i)^3 - (2-i)^2}$

i. $(3-2i)^2 + \frac{4-5i}{2+i}$

j. $(1-2i) + \frac{1+i}{2+i}$

k. $\frac{3-2i}{i}$

l. $(3+2i)^3[(2-i)-(5-2i)]$

m. $\frac{\sqrt{3}-i}{1+i} - \frac{\sqrt{2}-i}{i}$

n. $\frac{\sqrt{3}-i}{1+i} - \frac{\sqrt{2}-i}{i}$

o. $\frac{3+2i}{1-i} + \frac{1+i}{3-2i}$

p. $\frac{3-4i}{(1-4i)(2+3i)}$

2. Tính

a. $\frac{3}{1+2i}$

b. $\frac{1+i}{1-i}$

c. $\frac{m}{i\sqrt{m}}$

h. $\frac{a+i\sqrt{b}}{i\sqrt{a}}$

i. $(2 - i)^4$

j. $\frac{1}{\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i}$

n. $(2 + 3i)^2$

o. $(2 - 3i)^3$

p. $\frac{4+2i}{1+i}$

q. $\frac{2+i+(1+i)(4-3i)}{3+2i}$

d. $\dfrac{a+i\sqrt{a}}{a-i\sqrt{a}}$
e. $\dfrac{3+i}{(1-2i)(1+i)}$
f. 2i(3 + i)(2 + 4i)
g. 3 + 2i + (6 + i)(5 + i)

k. $4-3i+\dfrac{5+4i}{3+6i}$
l. $\dfrac{(1+i)^2(2i)^3}{-2+i}$
m. (3 – 2i)(2 – 3i)

r. $\dfrac{(3-4i)(1+2i)}{1-2i}+4-3i$
s. $\dfrac{3-i}{i}+(5-i)^2$
t. $\dfrac{2+\sqrt{2}i}{1-\sqrt{2}i}+\dfrac{1+\sqrt{2}i}{2-\sqrt{2}i}$

Bài toán 2. Tính $(1+i)^{2012}$

Giải.

$$(1+i)^{2012}=\left[(1+i)^2\right]^{1006}=(2i)^{1006}=2^{1006}.i^{1006}=2^{1006}.(i^2)^{503}=2^{1006}.(-1)^{503}=-2^{1006}$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Tính.

a. $1+i+i^2+i^3+...+i^{2009}$ b. $(1-i)^{100}$ c. $(1+i)^{2008}+(1-i)^{2008}$

Bài toán 3. Tìm các số thực x và y biết $2x+yi-3+2i=x-yi+2+4i$

Giải.

$$2x+yi-3+2i=x-yi+2+4i\Leftrightarrow(2x-3)+(y+2)i=(x+2)+(4-y)i\Leftrightarrow\begin{cases}2x-3=x+2\\y+2=4-y\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=4\\y=1\end{cases}$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Tìm các số thực x và y biết:

a.(2x + 3) + (y + 2) i = x – (y – 4) i

b. (2 – x) – i$\sqrt{2}$ = $\sqrt{3}$ + (3 – y) i

c.(3x - 2) + (2y + 1) i = (x + 1) – (y – 5) i

d. (2x + y) + (y + 2) i = (x + 2) – (y – 4) i

Bài toán 4. Tìm tập hợp các điểm M trên mặt phẳng phức biểu diễn cho số phức z thỏa mãn:

a. $|z+i|=|z-2-3i|$; b. $|z+3|\le 1$

Giải. Đặt $z=x+yi$, khi đó:

a. $|z+i|=|z-2-3i|\Leftrightarrow|x+yi+i|=|x+yi-2-3i|\Leftrightarrow|x+(y+1)i|=|x-2+(y-3)i|$

$$\Leftrightarrow\sqrt{x^2+(y+1)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y-3)^2}\Leftrightarrow x+2y-3=0$$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là đường thẳng $x+2y-3=0$

b. $|z+3|\le1\Leftrightarrow|x+yi+3|\le1\Leftrightarrow|x+3+yi|\le1\Leftrightarrow\sqrt{(x+3)^2+y^2}\le1\Leftrightarrow(x+3)^2+y^2\le1$

Vậy tập hợp các điểm biểu diễn số phức z là hình tròn $(x+3)^2+y^2 \le 1$ tâm I(-3;0) và bán kính bằng 1

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Tìm tập hợp các điểm M trên mặt phẳng phức biểu diễn cho số phức z thỏa mãn:

a. $|z+\bar{z}+3| = 4$

b. $2|z - i| = |z-\bar{z}+2i|$

c. $|z| = |\bar{z}-3+4i|$

d. $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$

e. $|z-1+i| = 2$

a. $z + 2\bar{z} = 2 - 4i$

b. $z^2 - \bar{z} = 0$

f. $z^2 + |z| = 0$

g. $|2+z| = |i-z|$

h. $|z| = 1$

i. $|z| = |\bar{z}-3+4i|$

j. $|z-(2\_i)| = \sqrt{10}$ và $\bar{z}.\bar{z}' = 25$

k. $|z| \le 1$

l. $|z|=1$ và phần ảo của z =1

m. $|z-(3-4i)| = 2$

n. $\left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^4 = 1$

o. $\left|\dfrac{z-i}{z+i}\right| = 1$

p. $1<|z|\le 2$

q. $|2i-2\bar{z}| = |2z-1|$

r. phần thực của z thuộc đoạn [0;1], phần ảo của z thuộc đoạn [-1;2]

c. $z+2\bar{z} = 2-4i$

d. $z^2+|z|^2 = 0$

B. PHƯƠNG TRÌNH BẬC NHẤT, BẬC HAI TRÊN TRƯỜNG SỐ PHỨC

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Căn bậc hai của số phức

- $z=0$ có một căn bậc hai là 0
- $z=a$ là số thực dương có 2 căn bậc 2 là $\pm\sqrt{a}$
- $z=a$ là số thực âm có 2 căn bậc hai là $\pm\sqrt{|a|}.i$
- z = x + yi là số phức có căn bậc 2 là w = a + bi sao cho

$$w^2 = z \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} x^2-y^2=a \\ 2xy=b \end{cases}} \quad (a, b, x, y \in \mathbb{R})$$

2. Phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ (A, B, C là số thực cho trước, $A \neq 0$).

Tính $\Delta = B^2 - 4AC$

- $\Delta > 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_{1,2} = \dfrac{-B\pm\sqrt{\Delta}}{2A}$
- $\Delta < 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_{1,2} = \dfrac{-B\pm i\sqrt{|\Delta|}}{2A}$

o $\Delta = 0$: Phương trình có 1 nghiệm kép là $z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}$

3. Phương trình bậc hai $Az^2 + Bz + C = 0$ (A, B, C là số phức cho trước, $A \neq 0$).

Tính $\Delta = B^2 - 4AC$

o $\Delta \neq 0$: Phương trình có hai nghiệm phân biệt $z_{1,2} = \frac{-B \pm \delta}{2A}$,
(δ là 1 căn bậc hai của Δ)
o $\Delta = 0$: Phương trình có 1 nghiệm kép là $z_1 = z_2 = -\frac{B}{2A}$

II. CÁC DẠNG TOÁN.

Bài toán 1. Tìm căn bậc hai của các số phức sau:

a. -4; b. $3-4i$ (NC)

Giải.

a. Hai căn bậc hai của -4 là $\pm\sqrt{|-4|}.i = \pm 2i$

b. Gọi $w = x + yi$ là căn bậc hai của $3-4i$, ta có:

$$\begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ 2xy = -4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 - y^2 = 3 \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4 - 3x^2 - 4 = 0 \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x^2 = -1 \text{ (loại)} \\ x^2 = 4 \end{array}\right. \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = 2 \\ x = -2 \end{array}\right. \\ y = -\frac{2}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases} \\ \begin{cases} x = -2 \\ y = 1 \end{cases} \end{array}\right.$$

Vậy $3-4i$ có hai căn bậc hai là $2-i$ và $-2+i$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

1. Tìm căn bậc hai của các số phức sau:

8;3; -9; -11; -I; -2i; 2i; 4i

2. Tìm căn bậc hai của các số phức sau: (NC)

$-5+12i$; $8+6i$; $33-56i$; $-3+4i$; 3+4i; 5 – 12i

Bài toán 2. Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a. $(3-2i)z + 4 + 5i = 7 - 3i$; b. $\frac{z}{4-3i} + 2 - 3i = 5 - 2i$

Giải.

a. $(3-2i)z + 4 + 5i = 7 - 3i \Leftrightarrow (3-2i)z = 3 - 8i \Leftrightarrow z = \frac{3-8i}{3-2i} = \frac{25}{13} - \frac{18}{13}i$

b. $\frac{z}{4-3i} + 2 - 3i = 5 - 2i \Leftrightarrow \frac{z}{4-3i} = 3 + i \Leftrightarrow z = (3+i)(4-3i) = 15 - 5i$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a. $\frac{2+i}{1-i}z = \frac{-1+3i}{2+i}$ h. $\frac{3+5i}{z} = 2 - 4i$

b. $2iz + 1 - i = 0$

c. $(1 - i)z + 2 - i = 2z + i$

d. $(iz - 1)(z + 3i)(\bar{z} - 2 + 3i) = 0$

e. $(2 i)\bar{z} - 4 = 0$

f. $(4-5i)z = 2+i$

g. $(3-2i)^2(z+i) = 3i$

s. $(1 + 3i)z - (2 + 5i) = (2 + i)z$

t. $(3 + 4i)z = (1 + 2i)(4 + i)$

i. $\frac{z}{4-3i} + (2-3i) = 5-2i$

j. $(1 + 3i)z - (2 + 5i) = (2 + i)$

k. $(3 - 2i)z + (6 - 4i) = 5 - i$

l. $(3 + 4i)z + (1 - 3i) = 2 + 5i$.

m. $z\left(3-\frac{1}{2}i\right) = 3+\frac{1}{2}i$

n. $[(2-i)\bar{z}+3+i](iz+\frac{1}{2i}) = 0$

Bài toán 3. Giải các phương trình sau trên tập số phức: (NC)

a. $7z^2+3z+2=0$; b. $-3x^2+2x-1=0$

Giải.

a. $7z^2+3z+2=0$

$$\Delta = b^2-4ac=-47<0$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$z_1=\frac{-b+i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\frac{-3+\sqrt{47}.i}{14}=-\frac{3}{14}+\frac{\sqrt{47}}{14}i$$

$$z_2=\frac{-b-i\sqrt{|\Delta|}}{2a}=\frac{-3-\sqrt{47}.i}{14}=-\frac{3}{14}-\frac{\sqrt{47}}{14}i$$

b. $-3x^2+2x-1=0$

$$\Delta'=b'^2-ac=-2<0$$

Phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1=\frac{-b'+i\sqrt{|\Delta'|}}{a}=\frac{-1+\sqrt{2}.i}{-3}=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}i$$

$$x_2=\frac{-b'-i\sqrt{|\Delta'|}}{a}=\frac{-1-\sqrt{2}.i}{-3}=\frac{1}{3}+\frac{\sqrt{2}}{3}i$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

1. Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a. $x^2-\sqrt{3}.x+1=0$

b. $3\sqrt{2}.x^2-2\sqrt{3}.x+\sqrt{2}=0$

c. $3x^2-x+2=0$

d. $3x^2+x+2=0$

e. $x^2+x+1=0$

f. $z^4-8=0$

g. $x^3-1=0$

h. $z^3+1=0$

i. $z^4+4=0$

j. $5z^2-7z+11=0$

k. $z^2-2\sqrt{3}z+7=0$

l. $z^3-8=0$

m. $z^2+z+7=0$

n. $z^2-z+1=0$

o. $z^2+2z+5=0$

p. $8z^2-4z+1=0$

q. $x^2+7=0$

r. $x^2-3x+3=0$

s. $x^2-5x+7=0$

t. $x^2-4x+11=0$

u. $z^2-3z+11=0$

2. Giải phương trình sau trên trường số phức

a. $z^4 - 5z^2 - 6 = 0$

b. $z^4 + 7z^2 - 8 = 0$

c. $z^4 - 8z^2 - 9 = 0$

d. $z^4 + 6z^2 + 25 = 0$

e. $z^4 + 4z - 77 = 0$

f. $8z^4 + 8z^3 = z + 1$

g. $z^4 + z^3 + \frac{1}{2}z^2 + z + 1 = 0$

h. $z^5 + z^4 + z^3 + z^2 + z + 1 = 0$

i. $\frac{4z-3-7i}{z-i} = z - 2i$

j. $z^3 + \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{2} = 0$

Bài toán 4. Giải các phương trình sau trên tập số phức: (NC)

a. $x^2 - (3+4i)x + 5i - 1 = 0$;   b. $z^2 - 2iz + 2i - 1 = 0$

Giải.

a. $x^2 - (3+4i)x + 5i - 1 = 0$

$$\Delta = b^2 - 4ac = -3 + 4i = (1+2i)^2 \neq 0$$

Gọi δ là một căn bậc hai của Δ, ta có $\delta = 1 + 2i$

Do $\Delta \neq 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$x_1 = \frac{-b+\delta}{2a} = \frac{3+4i+1+2i}{2} = 2+3i$$

$$x_2 = \frac{-b-\delta}{2a} = \frac{3+4i-(1+2i)}{2} = 1+i$$

b. $z^2 - 2iz + 2i - 1 = 0$

$$\Delta' = b'^2 - ac = -2i = (1-i)^2 \neq 0$$

Gọi δ' là một căn bậc hai của Δ', ta có $\delta' = 1 - i$

Do $\Delta' \neq 0$, phương trình có 2 nghiệm phân biệt:

$$z_1 = \frac{-b'+\delta'}{a} = \frac{i+1-i}{1} = 1$$

$$z_2 = \frac{-b'-\delta'}{a} = \frac{i-(1-i)}{1} = -1+2i$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ. (NC)

1. Giải các phương trình sau trên tập số phức:

a. $x^2 - (3 - i)x + 4 - 3i = 0$

b. $(z^2 + i)(z^2 - 2iz - 1) = 0$

c. $x^2 + (1+i)x - 2 - i = 0$

d. $2z^2 - iz + 1 = 0$

e. $z^2 + (-2 + i)z - 2i = 0$

f. $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$

g. $z^2 + (1 - 3i)z - 2(1 + i) = 0$

h. $x^2 - (2+8i)x + 14i - 23 = 0$

j. $z^2 - 80z + 4099 - 100i = 0$

k. $(z+3-i)^2 - 6(z+3-i) + 13 = 0$

l. $z^2 - (\cos\varphi + i\sin\varphi)z + i\cos\varphi\sin\varphi = 0.$

m. $z^4 - 8(1-i)z^2 + 63 - 16i = 0$

n. $z^4 - 24(1-i)z^2 + 308 - 144i = 0$

o. $(1 - i)x^2 - 2x - (11 + 3i) = 0$

p. $(1 + i)x^2 - 2(1 - i)x + 1 - 3i = 0$

i. $z^2-(5-14i)z-2(12+5i)=0$ q. $z^2+18z+1681=0$

2. Giải các hệ phương trình :

a. $\begin{cases} z_1+z_2=4+i \\ z_1^2+z_2^2=5-2i \end{cases}$ c. $\begin{cases} z_1^2+z_2^2=5+2i \\ z_1+z_2=4-i \end{cases}$ e. $\begin{cases} |z-2i|=|z| \\ |z-i|=|z-1| \end{cases}$

b. $\begin{cases} z_1.z_2=-5-5.i \\ z_1^2+z_2^2=-5+2.i \end{cases}$ d. $\begin{cases} u^2+v^2+4uv=0 \\ u+v=2i \end{cases}$

C. DẠNG LƯỢNG GIÁC CỦA SỐ PHỨC. (NC)

I. TÓM TẮT LÝ THUYẾT.

1. Dạng lượng giác của số phức.

$\boxed{z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)}$ $(r>0)$ là dạng lương giác của z = a + bi (a, b $\in ¡$, $z\neq 0$)

- $r=\sqrt{a^2+b^2}$ là môđun của z
- φ là một acgumen của z thỏa $\begin{cases} \cos\varphi = \dfrac{a}{r} \\ \sin\varphi = \dfrac{b}{r} \end{cases}$

2. Nhân chia số phức dưới dạng lượng giác. Nếu z = $r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$, $z'=r'(\cos\varphi'+i\sin\varphi')$ thì :

- $\boxed{z.z'=r.r'[\cos(\varphi+\varphi')+i\sin(\varphi+\varphi')]}$
- $\boxed{\dfrac{z}{z'}=\dfrac{r}{r'}[\cos(\varphi-\varphi')+i\sin(\varphi-\varphi')]}$

3. Công thức Moa-vrơ : $n\in N^*$ thì $\boxed{[r(\cos\varphi+i\sin\varphi)]^n=r^n(\cos n\varphi+i\sin n\varphi)}$

Nhận xét: $(\cos\varphi+i\sin\varphi)^n=\cos n\varphi+i\sin n\varphi$

4. Căn bậc hai của số phức dưới dạng lượng giác

Căn bậc hai của số phức $z = r(\cos\varphi+i\sin\varphi)$ $(r>0)$ là

$$\boxed{\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2}) \quad \text{và} \quad -\sqrt{r}(\cos\frac{\varphi}{2}+i\sin\frac{\varphi}{2})=\sqrt{r}[\cos(\frac{\varphi}{2}+\pi)+i\sin(\frac{\varphi}{2}+\pi)]}$$

II. CÁC DẠNG TOÁN.

Bài toán 1. Viết dạng lượng giác của các số phức sau:

a. $z=2-2i$; b. $z=-1-\sqrt{3}.i$

Giải.

a. $z=2-2i$

- Mô đun $r=\sqrt{a^2+b^2}=2\sqrt{2}$

- Gọi φ là một acgumen của z ta có $\begin{cases}\cos\varphi = \dfrac{1}{\sqrt{2}} \\ \sin\varphi = -\dfrac{1}{\sqrt{2}}\end{cases} \Rightarrow \varphi = -\dfrac{\pi}{4}$

Dạng lượng giác $z = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\dfrac{\pi}{4}\right)\right]$

b. $z = -1 - \sqrt{3}.i$

- Mô đun $r = \sqrt{a^2 + b^2} = 2$
- Gọi φ là một acgumen của z ta có $\begin{cases}\cos\varphi = -\dfrac{1}{2} \\ \sin\varphi = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{cases} \Rightarrow \varphi = -\dfrac{2\pi}{3}$

Dạng lượng giác $z = 2\left[\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right) + i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

1. Tìm một acgumen của mỗi số phức sau:

a. $-2 + 2\sqrt{3}.i$

b. 4 – 4i

c. 1 – $\sqrt{3}.i$

d. $\cos\dfrac{\pi}{4} - i.\sin\dfrac{\pi}{4}$

e. $-\sin\dfrac{\pi}{8} - i.\cos\dfrac{\pi}{8}$

f. $(1 - i.\sqrt{3})(1 + i)$

g. $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$

2. Thực hiện phép tính

a. $5(\cos\dfrac{\pi}{6} + i.\sin\dfrac{\pi}{6}).3(\cos\dfrac{\pi}{4} + i.\sin\dfrac{\pi}{4})$

b. $\dfrac{\sqrt{2}(\cos 45^0 + i.\sin 45^0)}{\sqrt{3}(\cos 15^0 + i.\sin 15^0)}$

c. 3(cos20^o + isin20^o)(cos25^o + isin25^o)

d. $\dfrac{\sqrt{2}(\cos\dfrac{2\pi}{3} + i.\sin\dfrac{2\pi}{3})}{2(\cos\dfrac{\pi}{2} + i.\sin\dfrac{\pi}{2})}$

3. Viết dưới dạng lượng giác các số phức sau:

a. $1 - i\sqrt{3}$

b. 1 + i

c. $(1 - i\sqrt{3})(1 + i)$

d. $\dfrac{1 - i\sqrt{3}}{1 + i}$

e. $2.i.(\sqrt{3} - i)$

f. $\dfrac{1}{2 + 2i}$

g. z = $\sin\varphi + i.\cos\varphi$

Bài toán 2. Tính:

a. $(1-i)^{10}\left(\sqrt{3} + i\right)^6$; b. $\dfrac{(1+i)^{10}}{\left(\sqrt{3} + i\right)^9}$

Giải.

a. $(1-i)^{10}\left(\sqrt{3} + i\right)^6$

$$(1-i)^{10} = \left[\sqrt{2}\left(\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right)\right]^{10} = 2^5\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{2}\right)\right] = 32(0 - i) = -32i$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^6=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^6=32.\left(\cos\pi+i\sin\pi\right)=2^6\left(-1+0i\right)=-2^6$$

$$\Rightarrow (1-i)^{10}\left(\sqrt{3}+i\right)^5=-32i.\left(-64\right)=2048i$$

b. $\dfrac{(1+i)^{10}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}$

$$(1+i)^{10}=\left[\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]^{10}=2^5.\left(\cos\frac{5\pi}{2}+i\sin\frac{5\pi}{2}\right)=32\left(i\right)=32i$$

$$\left(\sqrt{3}+i\right)^9=\left[2\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)\right]^9=2^9\left(\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}\right)=-512i$$

$$\Rightarrow \frac{(1+i)^{10}}{\left(\sqrt{3}+i\right)^9}=-\frac{1}{16}$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Tính :

a. $[\sqrt{2}(\cos 30^0+i\sin 30^0)]^7$

b. $(\sqrt{3}-i)^6$

c. $\left(\dfrac{1+i}{1-i}\right)^{33}$

d. $\left(\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12}$

e. $\left(\dfrac{i+1}{i}\right)^{2010}$

f. $\left(\dfrac{5+3i\sqrt{3}}{1-2i\sqrt{3}}\right)^{21}$

g. $\left(\cos\dfrac{\pi}{3}-i\sin\dfrac{\pi}{3}\right)i^5(1+\sqrt{3}i)^7$

h. $\left(\dfrac{1+i}{-\sqrt{3}+i}\right)^{280}$

i. $(1+i)^{25}$

j. $\dfrac{(1+i)^{50}}{(\sqrt{3}+i)^{49}}$

k. $(\cos 12^o+i\sin 12^o)^5$

Bài toán 3. Tìm căn bậc hai của các số phức sau:

a. $z=-1-i\sqrt{3}$; b. $z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

Giải.

a. $-1-i\sqrt{3}$

Dạng lượng giác: $z=2\left[\cos\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{2\pi}{3}\right)\right]$

Hai căn bậc hai của z là

$$w_1=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{2}i \text{ và}$$

$$w_2=-\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\frac{\pi}{3}\right)\right]=-\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)=-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{2}}i=-\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{6}}{2}i$$

b. $z=\dfrac{1-i\sqrt{3}}{1+i}$

Dạng lượng giác $z=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)+i\sin\left(-\dfrac{7\pi}{12}\right)\right]$

Hai căn bậc hai của z là $w_1 = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{24}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{24}\right)\right]$ và

$$w_2 = -\sqrt[4]{2}\left[\cos\left(-\frac{7\pi}{24}\right) + i\sin\left(-\frac{7\pi}{24}\right)\right] = \sqrt[4]{2}\left[\cos\left(\frac{17\pi}{24}\right) + i\sin\left(\frac{17\pi}{24}\right)\right]$$

BÀI TẬP TƯƠNG TỰ.

Tìm căn bậc hai của mỗi số phức sau :

a. $-1 + 4\sqrt{3}.i$

b. $4 + 6\sqrt{5}.i$

c. $-1 - 2\sqrt{6}.i$

d. $1+4\sqrt{3}i$

e. $(\sqrt{3} - i)^6$

f. $\left(\frac{i}{1+i}\right)^{2004}$

g. $-11+4\sqrt{3}i$

h. $\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)$

i. $\cos\frac{\pi}{4} - i\sin\frac{\pi}{4}$

j. $\cos\frac{\pi}{3} - i\sin\frac{\pi}{3}$

k. $4+6\sqrt{5}i$

l. $-1-2\sqrt{6}i$